

令和4年度 専攻科学生選抜学力試験問題用紙 数学

- ① 次の不等式を解け。

$$2x^3 - 3x^2 - 18x - 8 > 0$$

- ② 次の方程式を解け。

$$3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 = 0$$

- ③ α が第4象限の角で、 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ のとき、 $\sin\left(2\alpha + \frac{5}{6}\pi\right)$ の値を求めよ。

- ④ 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \cos^5(3x - 1)$$

$$(2) y = \log \frac{2x+1}{(x+3)^5} \quad \left(x > -\frac{1}{2}\right)$$

- ⑤ D を不等式 $0 \leq x + 2y \leq 1$, $-1 \leq x - 2y \leq 1$ で表される領域とすると、次の2重積分の値を求めよ。

$$\iint_D (x - y) dx dy$$

- ⑥ x を t の関数とすると、次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 8x = 3e^{-4t}$$

- ⑦ 変数 x, y, z に関する次の連立1次方程式が $x = y = z = 0$ 以外の解をもつための a, b の条件を求めよ。ただし、 a, b は $ab \neq 0$ を満たす定数とする。

$$\begin{cases} ax + by + bz = 0 \\ bx + ay + bz = 0 \\ bx + by + az = 0 \end{cases}$$

- ⑧ 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となる 行列 P を1つ求めよ。

(2) A^n を求めよ。($n = 1, 2, \dots$)

以下は選択問題である。「9」および「10」または「11」および「12」または「13」および「14」のうちいずれか一組を選択し解答せよ。

- 9 スカラー場 $\varphi = \frac{1}{2}x^2(y^2 - z^2)$ とベクトル場 $\mathbf{a} = (xy^2 - xz^2, x^2y, -x^2z)$ について、次の問いに答えよ。

- (1) φ の勾配 $\nabla\varphi$ を求めよ。
- (2) $\mathbf{a}$ の発散 $\nabla \cdot \mathbf{a}$ を求めよ。
- (3) $\mathbf{a}$ の回転 $\nabla \times \mathbf{a}$ を求めよ。

- 10 $D: 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$ を定義域とするベクトル関数 $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v^2)$ の表す曲面を S とする。 S の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の z 成分を正にとるとき、ベクトル場 $\mathbf{a} = (y, -x, z)$ の S 上の面積分の値を求めよ。

- 11 次の $z = x + yi$ (x, y は実数) についての複素関数は正則であるか。また、正則であれば導関数を求めよ。

- (1) $f(z) = x - yi$
- (2) $g(z) = (3x^2 - 2xy - 3y^2) + (x^2 + 6xy - y^2)i$

- 12 次の複素積分の値を求めよ。ただし、 C は原点を中心とする半径 2 の円である。

- (1) $\int_C \frac{\sin z}{\left(\frac{z}{3} - 1\right)(z + \pi)} dz$
- (2) $\int_C \frac{z^2}{2z + 3i} dz$

- 13 次の問いに答えよ。

- (1) 1 から 8 までの数字が書かれた 8 枚のカードをよく切って 2 枚を抜くとき、5, 6, 7 のうちの 2 枚の組み合わせになる確率を求めよ。
- (2) 10 本のくじの中に当たりくじが 3 本ある。A, B の 2 人がこの順番で 1 本ずつ引くとき、A が当たり、B が当たらない確率を求めよ。ただし、非復元抽出とする。
- (3) あるコインを 1 回投げるとき、表が出る確率は $\frac{2}{3}$ であるという。このコインを 7 回投げるとき、表が 3 回出る確率を求めよ。

- 14 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < 0, 1 < x) \end{cases}$$

で与えられるとき、次の問いに答えよ。

- (1) X の平均 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求めよ。
- (2) $2X + 1$ の平均 $E[2X + 1]$ と分散 $V[2X + 1]$ を求めよ。