

2020年度 専攻科学生選抜学力試験問題用紙 数学

1 次の式を因数分解せよ。

$$3x^3 + 5x^2 - 11x + 3$$

2 次の不等式を解け。

$$4^{x+1} + 3 \cdot 2^x - 1 > 0$$

3 $0 \leq x < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$\sin 2x + \sin x = 0$$

4 関数 $f(x) = (x-1)e^x$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求め、グラフの概形をかけ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

- 5 不等式 $x^2 + y^2 \leq 4$ で表される領域を D とするとき、次の2重積分の値を求めよ。

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}} dx dy$$

- 6 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = \sin 2t$$

- 7 点 $(1, 0, 2)$ を通り、ベクトル $(2, 1, -1)$ に垂直な平面 π について、次の問いに答えよ。

- (1) 平面 π の方程式を求めよ。
- (2) 次の方程式で表される直線と平面 π の交点の座標を求めよ。

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-1}$$

- 8 行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & x & -2 \\ 3 & 0 & x \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

について、 A の固有値は $2, 3, y$ である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) x, y の値を求めよ。
- (2) A の固有ベクトルを求めよ。
- (3) A を対角化せよ。

以下は選択問題である。「9」および「10」または「11」および「12」または「13」および「14」のうちいずれか一組を選択し解答せよ。

9 ベクトル関数 $\mathbf{r} = (t^2, 2t, \log t)$ ($1 \leq t \leq e$) の表す曲線を C とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の長さを求めよ。
- (2) 曲線 C に沿うベクトル場 $\mathbf{a} = (-y, 2x, z)$ の線積分の値を求めよ。

10 $D: u > 0, 0 \leq v \leq 2\pi$ を定義域とするベクトル関数

$$\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, \log u)$$

の表す曲面を S とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲面 S 上の (u, v) に対応する点における単位法線ベクトルを求めよ。
- (2) 曲面 S 上の $(1, 0)$ に対応する点における接平面の方程式を求めよ。

11 複素関数 $f(z) = \frac{z}{z+2i}$ について、次の曲線に沿う積分の値を求めよ。

- (1) 原点を中心とする単位円
- (2) 3点 $1, -1, -3i$ でつくられる三角形の周

12 次の複素積分の値を求めよ。ただし、 C は点 1 を中心とする半径 2 の円である。

(1) $\int_C \frac{\sin z}{z + \frac{\pi}{4}} dz$

(2) $\int_C \frac{z^2 - 2}{z(z+2)} dz$

13 白玉 4 個, 黒玉 5 個が入っている袋から 3 個の玉を同時に取り出すとき, 次の確率を求めよ。

- (1) 白玉 1 個, 黒玉 2 個を取り出す。
- (2) 3 個とも同じ色の玉を取り出す。
- (3) 少なくとも 1 個は白玉を取り出す。

14 100 通に 1 通の割合で迷惑メールを受信している A さんは, 受信したメールが迷惑メールか否かを自動的に判定する機能がついている電子メールソフトを使用している。その機能を使うと, 迷惑メールであれば $\frac{199}{200}$ の確率で迷惑メールと判定されるが, 迷惑メールでなくても $\frac{1}{100}$ の確率で迷惑メールと判定される。A さんが受信したあるメールについて, この電子メールソフトが迷惑メールと判定したとき, そのメールが実際に迷惑メールである確率を求めよ。